ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ ПО МАТЕМАТИКЕ в 2025/26 УЧЕБНОМ ГОДУ 8 КЛАСС

1. Какое количество нулей в конце числа, являющегося значением выражения

$$2020^{2025} + 2020^{2025} + \ldots + 2020^{2025} \text{ (всего 2020 слагаемых)?}$$

Решение.

Имеем $2020^{2025} + \cdots + 2020^{2025} = 2020 \cdot 2020^{2025} = 2020^{2026} = (202 \cdot 10)^{2026}$.

Ответ: 2026 нулей.

2. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Спросив каждого жителя острова про каждого из остальных, лжец тот или рыцарь, было получено 26 ответов «рыцарь» и 30 ответов «лжец». Сколько рыцарей было на острове?

Решение.

Пусть всего на острове x жителей и $x-1$ ответ дал каждый, $x(x-1) = 26 + 30 = 56$. Тогда $x = 8$. Если рыцарей y, тогда лжецов $8 - y$. Каждый рыцарь ответил «рыцарь» $y - 1$ раз, а каждый лжец так ответил $7 - y$ раз. Тогда $y(y-1) + (8-y)(7-y) = 26$. Отсюда $y = 3$ или $y = 5$.

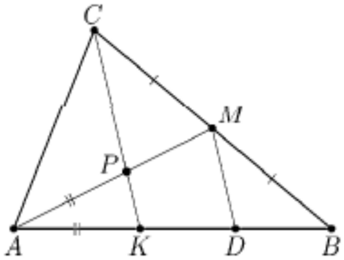
Ответ: 3 или 5.

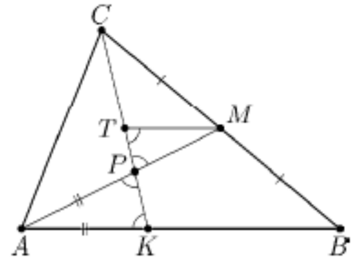
3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K такая, что отрезок CK пересекает медиану AM в точке P, причем $AK = AP$. Найдите отношение $BK{:}PM$.

Решение.

<u>1-й способ.</u> Проведем через точку M прямую, параллельную CK, которая пересекает сторону AB в точке D. Тогда $BD = KD$ (по теореме Фалеса). Кроме того, углы MDA, PKA и DMA равны. Значит, $AD = AM$. Учитывая, что $AK = AP$, получим $PM = KD = \frac{1}{2}BK$, откуда $BK{:}PM = 2{:}1$.

<u>2-й способ.</u> Пусть точка T — середина отрезка CK. Тогда MT — средняя линия треугольника CBK. Следовательно, $MT \parallel BK$ и $BK = 2MT$. Поскольку $AK = AP$ и $MT \parallel BK$, то $\angle MTP = \angle APK = \angle MPT$. Отсюда $MT = MP$, и, значит, $BK = 2PM$.





Ответ: 2:1.

4. Графики трех функций $y = k_1x + k_1$, $y = k_2x + k_2$ и $y = kx + a$ пересекаются в одной точке, причем $k_1 \neq k_2$ Обязательно ли $k = a$? Ответ обоснуйте.

Решение.

Если $x = -1$, $y = 0$, то уравнения $y = k_1x + k_1$ и $y = k_2x + k_2$ обращаются в верные равенства при любых значениях k_1 и k_2. Поэтому точка $(-1;0)$ принадлежит первым двум графикам (прямым). Так как $k_1 \neq k_2$, то эти прямые различны, значит, другой общей точки у них нет. Следовательно, точка $(-1;0)$ принадлежит и графику третьей функции $y = kx + a$. Тогда $0 = -k + a$, т. е. $k = a$.

Ответ: обязательно.

5. Число назовем «хорошим», если оно делится на произведение своих цифр. Существуют ли четыре последовательных «хороших» восьмизначных числа?

Решение.

Предположим, что n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ — «хорошие» числа. В записи этих чисел не может быть цифры 0 (на 0 делить нельзя), поэтому эти числа отличаются только последней цифрой. Следовательно, одно из них заканчивается либо на 4, либо на 8. Далее можно рассуждать по-разному.

1-й способ. Пусть P — произведение первых семи цифр числа n. Так как соседние числа n и $n+1$ взаимно просты и оба делятся на P, то $P = 1$. Следовательно, каждая из первых семи цифр числа равна 1. Но число 11111114 не делится на 4, а число 11111118 не делится на 8. Получили противоречие.

2-й способ. Среди этих четырёх чисел есть нечётные. Для того, чтобы нечётное число делилось на произведение своих цифр, необходимо, чтобы все цифры числа были нечётными. Следовательно, первые шесть цифр каждого из четырёх чисел — нечётные. Но числа, оканчивающиеся на $\overline{a4}$ и $\overline{a8}$, где a — нечётная цифра, не делится на 4. Получили противоречие.

Ответ: не существует.