ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ ПО МАТЕМАТИКЕ в 2025/26 УЧЕБНОМ ГОДУ 11 КЛАСС

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$a\left(x^2+x\right)+\ x^2+4x+a-4=0$$

имеет один корень?

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$x^2(a+1)+x(a+4)+a-4=0.$$

Уравнение данного вида имеет один корень, если оно либо: а) линейное, либо: б) квадратное, имеющее дискриминант, равный нулю.

а) Уравнение линейное, если $a+1=0$, то есть $a=-1$. При этом $x=\frac{5}{3}$ — единственный корень.

б) Уравнение квадратное, если $a\neq-1$. Корень будет единственным, если дискриминант равен нулю:

$D=(a+4)^2-4(a+1)(a-4)=-3a^2+20a+32$;

$D=0;\ -3a^2+20a+32=0$.

Решая это уравнение, получаем, что $a=8$ или $a=-\frac{4}{3}$.

Ответ: $a=-1,\ a=8$ или $a=-\frac{4}{3}$.

2. Существует ли такое число x, что $\operatorname{tg}x+\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}$ являются целыми числами?

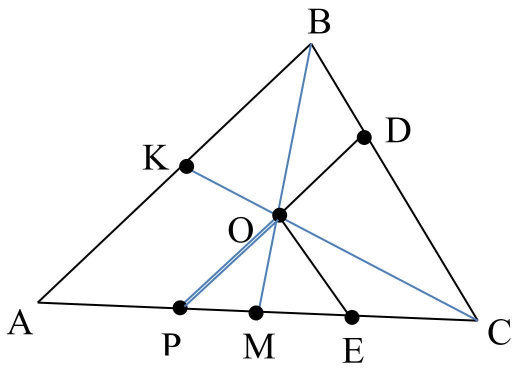
Решение.

Пусть $\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=m$ и $\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}=n$, где m и n — целые. Тогда $\operatorname{tg}x=m-\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}x=n-\sqrt{3}$. Перемножая эти равенства, получим $1=mn+3-\sqrt{3}(m+n)$, откуда $mn+2=\sqrt{3}(m+n)$. Слева написано целое число, а справа число будет целым, только если $m+n=0$. Тогда $mn=-2$. Отсюда $m=-n$; $n^2=2$, но тогда n — не целое. Получили противоречие. Значит, такого числа x не существует.

Ответ: не существует.

3. В треугольнике ABC через точку пересечения медиан O проведены отрезки OD и OE, параллельные сторонам AB и BC соответственно ($D\in BC$, $E\in AC$). Чему равна площадь трапеции $ODCE$, если площадь треугольника ABC равна 27 см^2?

Решение.



Пусть площадь треугольника ABC равна S (S = 27 см^2)*,* а медианы BM и CK пересекаются в точке O. Тогда по свойству медиан имеем $BO{:}OM = 2{:}1$, $CO{:}OK = 2{:}1$.

Продлим отрезок OD до пересечения со стороной треугольника AC в точке P. Так как $OD \parallel AB$ по условию*,* то $DP \parallel AB$. Поэтому $\triangle PDC \sim \triangle ABC$ по двум углам и $CO{:}CK = 2{:}3$, то есть коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{4}{9}$, $\quad S_{\triangle PDC} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{9} S$.

Далее, $OP \parallel AB$*,* $OE \parallel BC$ (по условию)*,* поэтому $\triangle POE \sim \triangle ABC$ по двум углам и $OM{:}BM = 1{:}3$, то есть коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{S_{\triangle POE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{1}{9}$, $\quad S_{\triangle POE} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{9} S$. Таким образом,

$$S_{ODCE} = S_{\triangle PDC} - S_{\triangle POE} = \frac{4}{9}S - \frac{1}{9}S = \frac{3}{9}S = \frac{1}{3}S = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9\ \left(\text{см}^2\right).$$

Ответ: 9 см^2.

4. Докажите, что выражение $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ делится на 19 для каждого натурального n.

Решение.

Применим метод математической индукции.

При $n = 1$ имеем: $5 \cdot 2^{3\cdot 1-2} + 3^{3 \cdot 1-1} = 5 \cdot 2^1 + 3^2 = 10 + 9 = 19$ делится на 19. Таким образом, база индукции имеет место.

Предположим, что исходное выражения делится на 19 при $n = k$, тогда существует целое m такое, что $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1} = 19 \cdot m$.

Рассмотрим исходное выражение при $n = k + 1$:

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 2^3\left(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}\right) -$$

$$- 2^3 \cdot 3^{3k-1} + 3^{3k+2} = \{\textit{согласно индукционной гипотезе}\} = 2^3 \cdot 19m -$$

$$- 8 \cdot 3^{3k-1} + 27 \cdot 3^{3k-1} = 19 \cdot \left(8m + 3^{3k-1}\right).$$

Так как $\left(8m + 3^{3k-1}\right)$ является целым числом, то выражение $5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1}$ делится на 19. Таким образом, шаг индукции показан.

Значит согласно методу математической индукции получаем, что $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ делится на 19 для каждого натурального n.

5. Можно ли во всех клетках таблицы $n \times n$ расставить числа $+\ 1$ и -1 так, чтобы в симметричных относительно центра клетках стояли противоположные числа, а сумма чисел в каждом столбике и в каждой строчке равнялась нулю, если: а) $n = 8$; б) $n = 10$?

Решение.

а) Можно. Например, как на рис.1.

+1	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1
−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	+1
−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	+1
+1	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1
+1	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1
−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	+1
−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	+1
+1	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1

Рис.1

б) Нельзя. Разобьем квадрат 10×10 на 4 квадрата 5×5 (см. рис. 2).

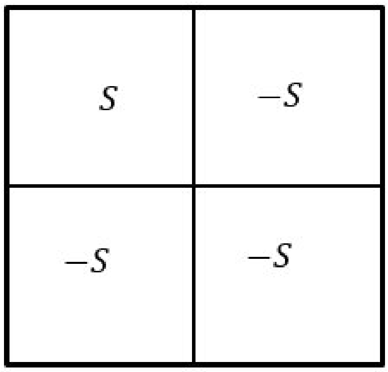


Рис 2

Пусть сумма чисел в правом верхнем квадрате равна S. Так как суммы по всем строчкам и всем столбцам равны нулю, то суммы в правом верхнем и в левом нижнем квадратах равны $-\ S$. Поскольку в симметричных относительно центра клетках стоят противоположные числа, то сумма чисел в правом нижнем углу тоже равна $-\ S$. Значит, сумма чисел в столбцах в правом верхнем и правом нижнем квадратах равна 0. Получаем $-S + (-S) = 0$; $S = 0$. Но этого не может быть, поскольку сумма 25 чисел $+1$ и -1 не может дать 0.

Ответ: а) можно; б) нельзя.