ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ПО МАТЕМАТИКЕ
в 2025/26 УЧЕБНОМ ГОДУ
9 КЛАСС

1. Известно, что выражение $6n+11m$ делится на 31 для некоторых целых n и m. Докажите, что $n+7m$ делится на 31.

Решение.

Так как $6n+11m$ делится на 31, то существует такое целое k, что $6n+11m=31k$. Рассмотрим выражение:

$6(n+7m)=6n+42m=6n+11m+31m=31k+31m=31(k+m)$. Таким образом, так как $(k+m)$ целое число, то $6(n+7m)$ делится на 31. Осталось заметить, что числа 6 и 31 взаимно простые, значит, $(n+7m)$ делится на 31.

2. Решить уравнение: $4x^2+\frac{10}{3x}=\frac{61}{9}$.

Решение.

$4x^2+\dfrac{10}{3x}=\dfrac{61}{9}$;

$4x^2+\frac{10}{3x}=\frac{25}{9}+\frac{36}{9}$;

$4x^2-\frac{25}{9}=\frac{36}{9}-\frac{10}{3x}$;

$(2x-\frac{5}{3})(2x+\frac{5}{3})=\frac{2}{x}(2x-\frac{5}{3})$;

$(2x-\frac{5}{3})(2x+\frac{5}{3}-\frac{2}{x})=0$;

$$\left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{5}{3}=0, \\ 2x+\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{x}=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{6}, \\ 2x+\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{x}=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{6}, \\ x\neq 0, \\ 6x^2+5x-6=0;\quad D=25+144=169; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{6}, \\ x\neq 0, \\ x_1=\frac{2}{3}, \\ x_2=-\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{5}{6}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{3}{2}$.

3. В трапеции одна боковая сторона вдвое больше другой, а сумма углов при большем основании равна 120^0. Найти углы трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — трапеция с большим основанием AD, а ее боковая сторона CD вдвое больше AB. Выберем на AD точку E такую, что BE параллелен (и равен) CD, и обозначим через M середину отрезка BE. Тогда треугольник ABM равнобедренный с углом 60^0 при вершине B. Следовательно, треугольник ABM равносторонний, и точка M равноудалена от A, B и E. Значит, M — центр окружности, содержащей точки A, B и E, а BE — её диаметр. Угол BAE вписанный и опирается на этот диаметр, следовательно, его величина равна 90^0. Тогда величина угла BAD тоже равна 90^0, а угла CDA — 30^0.

Ответ: 90^0, 90^0, 30^0, 150^0.

4. Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$. Найдите минимальное значение следующего выражения: $(x_1+x_2+x_3+x_4)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)$.

Решение (способ 1).

Применим несколько раз неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right) \geq$$

$$\left(2\sqrt{x_1x_2}+2\sqrt{x_3x_4}\right)\left(2\sqrt{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}}+ \ +2\sqrt{\frac{1}{x_3}\frac{1}{x_4}}\right) \geq 2\sqrt{2\sqrt{x_1x_2}\cdot 2\sqrt{x_3x_4}}\cdot$$

$$2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{x_3}\frac{1}{x_4}}} = 16\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\frac{1}{x_3}\frac{1}{x_4}} = 16.$$

Таким образом, искомое выражение принимает значение, не меньшее 16. Покажем, что данное значение достигается. Заметим, что при $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ выражение $(x_1+x_2+x_3+x_4)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)$ принимает значение 16.

Решение (способ 2).

Применим неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим:

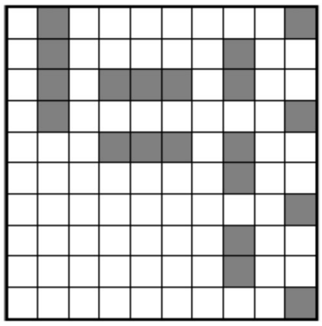
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq 4\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4};$$
$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\frac{1}{x_3}\frac{1}{x_4}}.$$

Так как обе части данных неравенств положительны, то мы можем перемножить их и получим при этом справедливое неравенство:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) \geq 4\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\frac{1}{x_3}\frac{1}{x_4}} = 16.$$

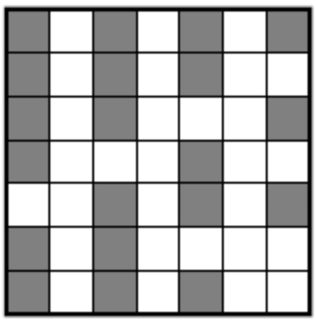
Таким образом, искомое выражение принимает значение, не меньшее 16. Покажем, что данное значение достигается. Заметим, что при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ выражение $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)$ принимает значение 16.

Ответ: 16.



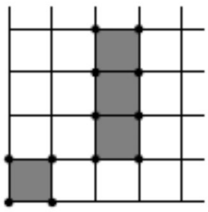
5. Комплект кораблей для игры в «Морской бой» включает в себя один корабль 1×4, два корабля 1×3, три корабля 1×2, четыре корабля 1×1 и легко размещается на доске 10×10 (согласно правилам, корабли не должны соприкасаться даже углами, пример расположения показан на рисунке). Каковы наименьшие размеры квадратной доски, на которой можно разместить этот комплект, соблюдая правила? Ответ обосновать.

Решение.



Пример расстановки кораблей на доске 7×7 изображен на рисунке. Остается доказать, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.

Доказательство. Будем считать не клетки, а ***узлы*** доски, занимаемые кораблями. Корабль 1×4 занимает



2 5=10 узлов, корабль 1×3 занимает 8 узлов, корабль 1×2 — 6 узлов, корабль 1×1 — 4 узла; причем по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают 10+2·8+3·6+4·4=60 узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске 6×6 имеется лишь $(6+1)^2 = 49 < 60$ узлов. Полученное противоречие показывает, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.

Ответ: 7×7.