ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ ПО МАТЕМАТИКЕ в 2025/26 УЧЕБНОМ ГОДУ 10 КЛАСС

1. Определите, при каком условии уравнения

$$ax^2+bx+c=0,\quad bx^2+cx+a=0 \quad \text{и} \quad cx^2+ax+b=0$$

имеют общий корень. Найдите этот корень.

Решение.

Пусть m – общий корень уравнений. Тогда

$$am^2+bm+c=0,$$
$$bm^2+cm+a=0,$$
$$cm^2+am+b=0.$$

Сложим эти уравнения и получим:

$$(a+b+c)m^2+(a+b+c)\,m+(a+b+c)=0,$$
$$(a+b+c)\left(m^2+m+1\right)=0.$$

Отсюда или $m^2+m+1=0$, чего не может быть, так как дискриминант отрицательный, или $a+b+c=0$. Это и есть условие на параметры $a,\ b,\ c$. При этом общий корень равен 1.

Ответ: $a+b+c=0$; общий корень $x=1$.

2. Сколько единиц получится в результате, если сложить все числа

$$9,\ 99,\ 999,\ \dots,\ \underbrace{99\dots99}_{2025}\ ?$$

Решение.

Запишем сумму и преобразуем:

$$9+99+999+\dots+\underbrace{99\dots99}_{2025}=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\dots+$$
$$+\left(10^{2025}-1\right)=\left(10+10^2+10^3+\dots+10^{2025}\right)-2025=$$
$$=\underbrace{11\dots11}_{2025}0-2025=\underbrace{11\dots1}_{2021}09085.$$

Ответ: 2021.

3. В треугольнике ABC угол при вершине C равен $120°$. Докажите, что длина отрезка, соединяющего эту вершину с центром вписанной окружности, равна $2\,(p-AB)$, где $p-$ полупериметр треугольника ABC.

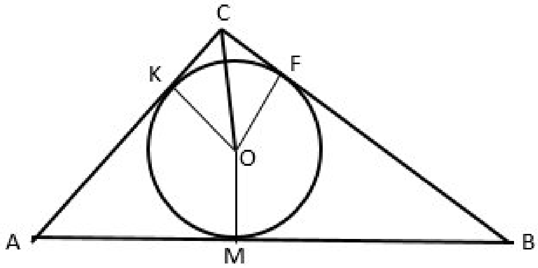
Решение.

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $AK=AM,\ BM=BF,\ CK=CF$. Периметр треугольника ABC равен

$$P_{ABC}=AB+BC+CA=2AM+2BM+2CK=2AB+2CK.$$

Отсюда $CK = \frac{P_{ABC}-2AB}{2} = \frac{P_{ABC}}{2} - AB = p - AB.$

Далее, в треугольнике COK имеем $\angle CKO = 90°$; $\angle OCK = 60°$. Значит, $CO = \frac{CK}{\cos \angle OCK} = \frac{CK}{\cos 60°} \frac{p-AB}{\frac{1}{2}} = 2(p - AB)$. Что и требовалось доказать.



4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}$ на интервале $(0; +\infty)$.

Решение.

Способ 1. Так как $x > 0$, то для каждой из сумм $x^2 + \frac{16}{x^2}$ и $2x + \frac{8}{x}$ можно применить неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} + 2\left(x + \frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}} + 2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 8 + 8 = 16.$$

Равенство достигается лишь при $x^2 = \frac{16}{x^2}$ и $x = \frac{4}{x}$, т. е. при $x = 2$.

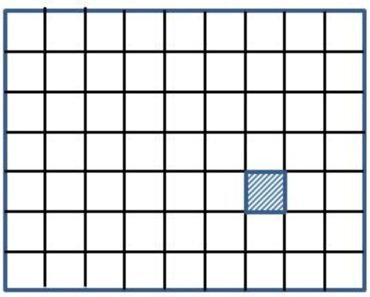
Способ 2. Преобразуем выражение для $f(x)$, выделяя полные квадраты:

$$f(x) = \left(x + \frac{4}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{4}{x}\right) + 1 - 9 = \left(x + \frac{4}{x} + 1\right)^2 - 9.$$

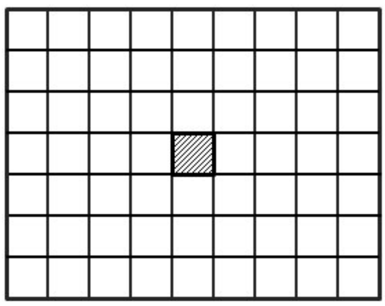
Так как $x > 0$, то по неравенству Коши между средним арифметическим и средним геометрическим имеем $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2 \cdot 2 = 4$, причем равенство достигается лишь при $x = \frac{4}{x}$, т. е. при $x = 2$. Поэтому при $x \in (0; +\infty)$ имеем $f(x) \geq (4+1)^2 - 9 = 25 - 9 = 16$, равенство достигается при $x = 2$.

Ответ: 16.

5. В замке Синей Бороды 63 комнаты (см. рисунок), причем одна из комнат всегда заперта на ключ (на рисунке заштрихована). Из каждой комнаты в любую соседнюю есть дверь. Можно ли обойти оставшиеся 62 комнаты, побывав в каждой только 1 раз: в случае а); в случае б)?



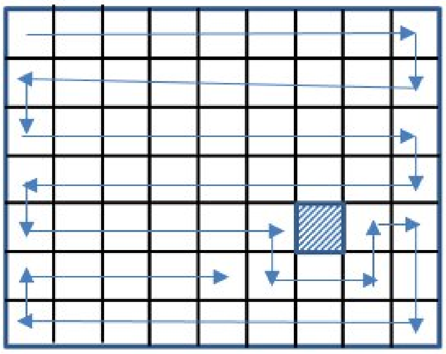
а)



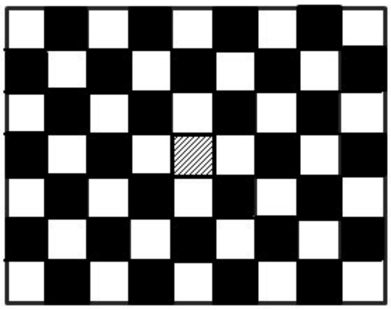
б)

Решение.

а) Можно. Например, так:



б) Нельзя. Применим шахматную раскраску.



Из каждой «белой» комнаты мы попадаем в «черную», а из каждой черной в «белую». Центральная комната закрыта. Мы смогли бы обойти все комнаты, побывав в каждой только один раз, если бы количество «черных» и «белых» комнат было или одинаковым или же отличались на 1. Сейчас же «белых» комнат 32, а «черных» 30. Обойти нельзя.

Ответ: а) можно; б) нельзя.